

# Τράπεζα Θεμάτων Γ' Λυκείου Μαθηματικά προσανατολισμού

Εκφωνήσεις



36 Ασκήσεις

3-11-2022

## Ασκησόπολις

Στέλιος Μιχαήλογλου



## Αντίστροφη συνάρτηση

### Θέμα 2ο

**23196.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x - 1, x \in \mathbb{R}$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται. (Μονάδες 7)

**β)** Να βρείτε την  $f^{-1}$ . (Μονάδες 9)

Έστω  $f^{-1}(x) = \ln(x+1), x > -1$ .

**γ)** Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f, f^{-1}$ . (Μονάδες 9)

**23198.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x} - 1, x \geq 0$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται. (Μονάδες 7)

**β)** Να βρείτε την  $f^{-1}$ . (Μονάδες 9)

Έστω  $f^{-1}(x) = (x+1)^2, x \geq -1$

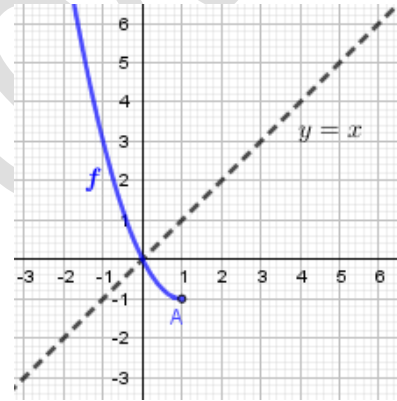
**γ)** Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των  $f, f^{-1}$ . (Μονάδες 9)

**23209.** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = (x-1)^2 - 1, x \leq 1$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $(-\infty, 1]$ . (Μονάδες 9)

**β)** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ . (Μονάδες 8)

**γ)** Να αποδείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση  $f^{-1}$  και να μεταφέρετε στην κόλλα σας ή στο φύλλο απαντήσεων το παρακάτω σχήμα με την γραφική παράσταση της  $f$  και το οποίο να συμπληρώσετε με την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f^{-1}$ . (Μονάδες 8)



**23216.** Έστω συνάρτηση  $f$  γνησίως μονότονη στο  $\mathbb{R}$  της οποίας η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία  $A(3,0)$  και  $B(0,8)$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ . (Μονάδες 7)

**β)** Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  η  $C_f$  είναι κάτω από τον άξονα  $xx'$  και για ποιες είναι πάνω από τον  $x'x$ . (Μονάδες 8)

**γ)** Να λύσετε την ανίσωση  $f(\ln x) > 0$ . (Μονάδες 10)

**24569.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x}}$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το  $D_f = [0,1]$ . (Μονάδες 05)

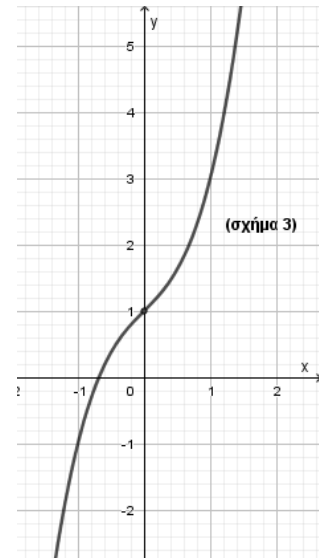
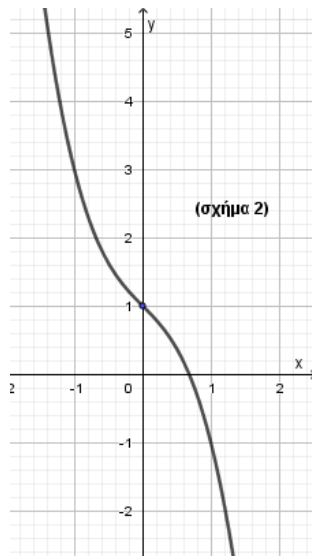
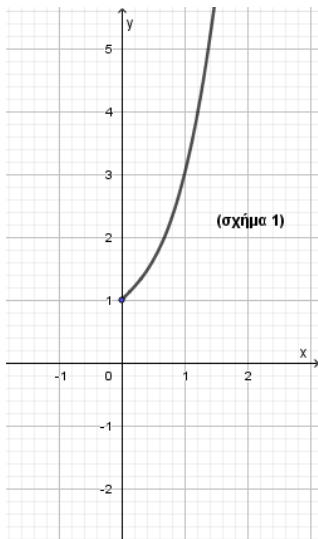
**β) i.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι “1-1”. (Μονάδες 10)

**ii.** Να λύσετε την εξίσωση  $f(f(x)) = 0, x \in [0,1]$ . (Μονάδες 10)

**23642.** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = x^3 + x + 1$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 07)

**β)** Ένα από τα παρακάτω σχήματα παριστάνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ . Να βρείτε ποιο είναι και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



γ) **i.** Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση  $|f|$ .

(Μονάδες 07)

**ii.** Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $|f|$ , να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $|x^3 + x + 1| = 2023$ .

(Μονάδες 06)

(Μονάδες 05)

**24703.** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \sqrt{1-x}$  και  $x \in (-\infty, 1]$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση  $f^{-1}$ .

(Μονάδες 8)

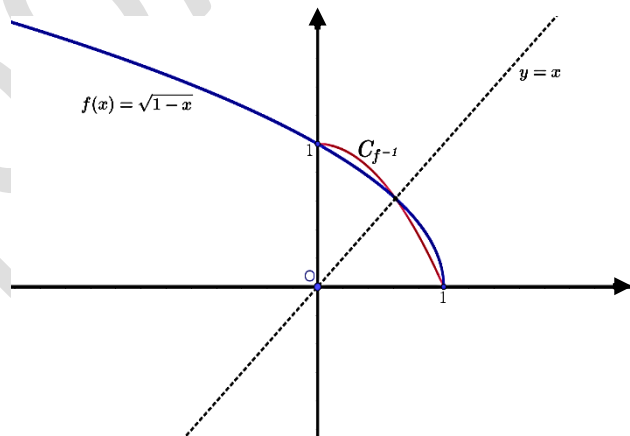
**β)** Να βρείτε τη συνάρτηση  $f^{-1}$ .

(Μονάδες 10)

**γ)** Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  και ένα τμήμα της γραφικής παράστασης της  $f^{-1}$ .

Να μεταφέρετε στο φύλλο απαντήσεων το παραπάνω σχήμα και το οποίο να συμπληρώσετε με την υπόλοιπη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f^{-1}$ .

(Μονάδες 7)



**24991.** Δίνεται η συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = -2\ln x + 1$ ,  $x > 0$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται.

(Μονάδες 08)

**β)** Να βρείτε τη συνάρτηση  $f^{-1}$ .

(Μονάδες 09)

**γ)** Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση  $g$  με τύπο  $g(x) = 1 - \ln x^2$ . Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις  $f, g$  δεν είναι ίσες και στη συνέχεια να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  στο οποίο ισχύει  $f = g$ .

(Μονάδες 08)

**Θέμα 4ο**

**23200.** Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια γνησίως μονότονη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα  $y'$  στο σημείο με τεταγμένη 3 και διέρχεται από το σημείο  $A(1, \ln 2)$ .

- α) Να βρείτε τη μονοτονία της. (Μονάδες 5)  
 β) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε θετικό αριθμό  $a$  ισχύει  $f(a \ln a) \leq f(\ln a)$ . (Μονάδες 7)  
 γ) Να λύσετε την εξίσωση  $f(e^{x-1} + \ln x) = \ln 2$ . (Μονάδες 6)  
 δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = f(x) + (3 - \ln 2)x - 3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση  $g$  δεν αντιστρέφεται. (Μονάδες 7)

**Όριο συνάρτησης στο  $x_0$** **Θέμα 2ο**

**24768.** Θεωρούμε τις συναρτήσεις με τύπους  $f(x) = x^2 - x + 1$  και  $g(x) = \sqrt{4x - 3}$ .

- α) Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $f(x) \geq \frac{3}{4}$ . (Μονάδες 6)  
 β) Να βρείτε τη συνάρτηση  $h = g \circ f$ . (Μονάδες 9)  
 γ) Αν  $h(x) = |2x - 1|$  είναι η σύνθεση του ερωτήματος β), να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - 1}{\sqrt{x + 1} - 1}$ . (Μονάδες 10)

**Μη πεπερασμένο όριο στο  $x_0$** **Θέμα 2ο**

**23217.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \ln(x - 1)$  και  $g(x) = \frac{1}{x - 1}$ .

- α) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια αιτιολογώντας την απάντησή σας.  
 i.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  (Μονάδες 7)      ii.  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$  (Μονάδες 8)  
 β) Να βρείτε  
 i. το πεδίο ορισμού της  $f \cdot g$  (Μονάδες 4)      ii. το  $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) \cdot g(x))$ . (Μονάδες 6)

**Όριο στο άπειρο****Θέμα 2ο**

**23641.** Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

- α) Να λύσετε την ανίσωση  $f(x^2) < f(x)$ . (Μονάδες 08)  
 β) Αν  $\alpha^2 < \alpha$ , τότε να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ f(\alpha^2 - \alpha) - f(0) \right] x = -\infty$ . (Μονάδες 09)  
 γ) Να λύσετε την εξίσωση  $f(e^x - 1) = f(0)$ . (Μονάδες 08)

## Συνέχεια Συνάρτησης

### Θέμα 2ο

**24767.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- α)** Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 13)  
**β)** Να αιτιολογήσετε γιατί αντιστρέφεται και να βρείτε την  $f^{-1}$ . (Μονάδες 12)

### Θέμα 3ο

**24761.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} 2023 - \frac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$ , η οποία είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .

- α)** Να δείξετε ότι  $\alpha = 2022$ . (Μονάδες 7)  
**β)** Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . (Μονάδες 8)  
**γ)** Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 2022$ . (Μονάδες 10)

## Ορισμός παραγώγου

### Θέμα 2ο

**24756.** Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(0) = 0$  και για την οποία ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ .

- α)** Να αποδείξετε ότι  $f'(0) = 2$ . (Μονάδες 9)  
**β)** Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ . (Μονάδες 8)  
**γ)** Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x}$ . (Μονάδες 8)

**24757.** Έστω συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ . Η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο της  $A(0,1)$  σχηματίζει με τον  $xx'$  γωνία  $45^\circ$ .

- α)** Να αποδείξετε ότι  $f'(0) = 1$ . (Μονάδες 8)  
**β)** Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο της  $A(0,1)$ . (Μονάδες 8)  
**γ)** Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1$ . (Μονάδες 9)

## Κανόνες παραγώγισης

### Θέμα 4ο

**23375.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- α)** Να αποδειχθεί ότι  $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ . (Μονάδες 06)  
**β)** Αφού πρώτα δικαιολογήσετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται, να αποδειχθεί ότι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το  $\mathbb{R}$ . (Μονάδες 13)  
**γ)** Να λυθεί η ανίσωση  $f^{-1}(x + f(x)) > x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . (Μονάδες 06)

**Θέμα 4ο**

**23106.** Δίνεται η συνάρτηση  $g$  με  $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ ,  $x \in [-1,1]$  και η συνεχής συνάρτηση  $f$ , ορισμένη στο  $[0, \pi]$ , με  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ , τέτοιες ώστε:

$(g \circ f)(x) = |\sin x|$ , για κάθε  $x \in [0, \pi]$ .

**α) i.** Να αποδείξετε ότι  $|f(x)| = |\eta\mu x|$ . (Μονάδες 06)

**ii.** Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης  $f(x) = 0$ . (Μονάδες 03)

**β)** Να βρείτε την συνάρτηση  $f$ . (Μονάδες 09)

**γ)** Δίνεται η συνάρτηση  $h: (0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $h(x) = \frac{1}{f(x) - x}$ , όπου  $f$  είναι η συνάρτηση του προηγούμενου

ερωτήματος. Να υπολογίσετε το παρακάτω όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ . (Μονάδες 07)

**Θεώρημα Μέσης Τιμής****Θέμα 2ο**

**24283.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & \text{αν } x \in [-1, 2] \\ x - 1, & \text{αν } x \in (2, 5] \end{cases}$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής. (Μονάδες 10)

**β)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση  $x_0 = 2$ . (Μονάδες 09)

**γ)** Να εξετάσετε ποιες από τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής, ικανοποιεί η συνάρτηση  $f$  στο διάστημα  $[-1, 5]$ . (Μονάδες 06)

**Σταθερή συνάρτηση****Θέμα 4ο**

**23199.** στω  $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε για κάθε  $x > 1$  να ισχύει

$$xf(x)f'(x) = \frac{1}{2} \text{ και } f(e) = 1.$$

**α)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = f^2(x) - \ln x$ ,  $x > 1$  είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της  $f$ . (Μονάδες 9)

Έστω  $f(x) = \sqrt{\ln x}$ ,  $x > 1$ .

**β)** Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία  $A(-e, 0)$  και  $B(e, 1)$  εφάπτεται στη γραφική παράσταση της  $f$  στο  $B$ . (Μονάδες 8)

**γ)** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x > 1$  ισχύει  $\frac{1}{x+1} < f^2(x+1) - f^2(x) < \frac{1}{x}$ . (Μονάδες 8)

## Τοπικά ακρότατα συνάρτησης

### Θέμα 2ο

**23197.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 2x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

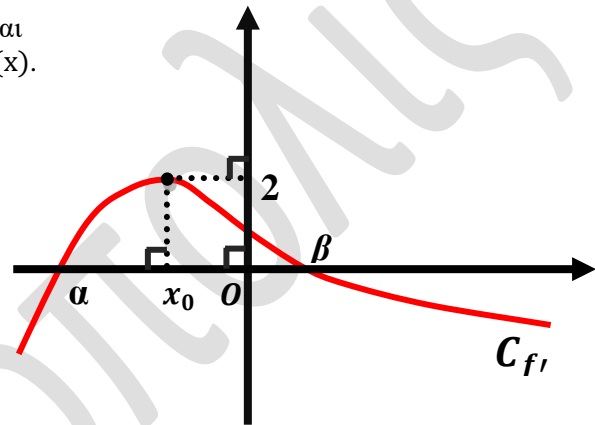
- α)** Να βρείτε δυο διαφορετικούς αριθμούς  $\alpha, \beta$  ώστε  $f(\alpha) = f(\beta)$ . Κατόπιν να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση  $f$  δεν αντιστρέφεται. (Μονάδες 9)
- β)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση, με τη βοήθεια της παραγώγου ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 8)
- γ)** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση  $C_f$  της  $f$ . (Μονάδες 8)

### Θέμα 4ο

**23210.** Θεωρούμε συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησης  $f'(x)$ .

Γνωρίζουμε ότι:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ,
- τα  $\alpha, \beta$  είναι οι τετμημένες των μοναδικών δύο σημείων στα οποία τέμνει τον άξονα  $x'x$  η γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησης  $f'(x)$ .
- $f(\alpha) < 0$ ,  $f(\beta) > 0$ .
- η γραφική παράσταση της  $f'(x)$  παρουσιάζει ολικό ακρότατο στη θέση  $x_0$ .



- α)** Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα η  $f(x)$ . (Μονάδες 8)
- β)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει τρεις ακριβώς πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 9)
- γ)** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , ισχύει  $f(x+1) - f(x) \leq 2$ . (Μονάδες 8)

**23376.** Δίνονται οι συναρτήσεις:

- $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και
- $g(x) = \ln x$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

Αν γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $x'x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , τότε:

- α)** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $h = g \circ f$ . (Μονάδες 07)
- β)** Να αποδείξετε ότι:
- i. η συνάρτηση  $h$  είναι περιττή. (Μονάδες 04)
  - ii. η συνάρτηση  $h$  είναι "1-1". (Μονάδες 06)
- γ)** Να λυθεί η εξίσωση  $h(x-1) + h\left(\ln \frac{1}{x}\right) = 0$ ,  $x > 0$ . (Μονάδες 08)

**24579.** Δίνεται συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , με τύπο  $f(x) = 2 \ln x - x$ .

- α) i.** Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία της. (Μονάδες 07)
- ii.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης. (Μονάδες 07)
- iii.** Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης. (Μονάδες 04)
- β)** Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $f(x) = \kappa$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}$ . (Μονάδες 07)



## Κυρτότητα – Σημεία καμπής

## Θέμα 4ο

**23531.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x - \ln x - 3$ .

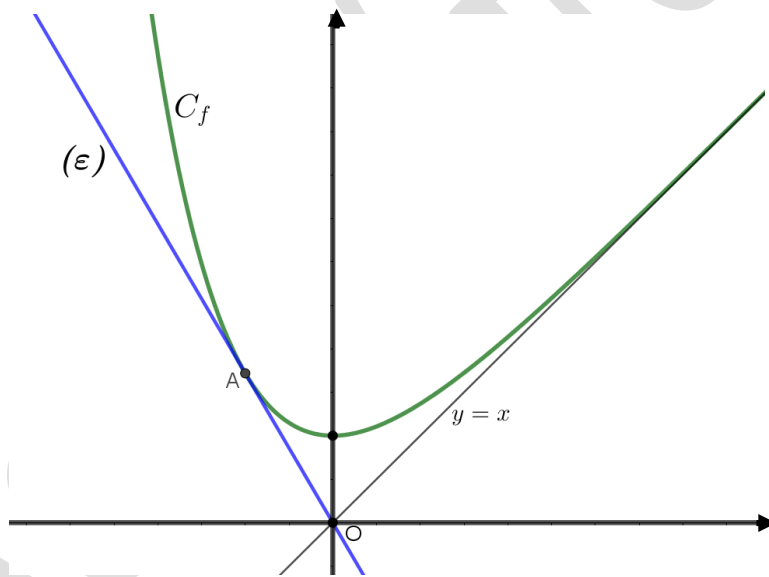
- α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι κυρτή στο  $(0, +\infty)$ . (Μονάδες 6)
- β) Να αποδείξετε ότι η  $f(x)$  παρουσιάζει θέση ολικού ελαχίστου σε κάποιο  $x_0 \in (0, 1)$  με  $f(x_0) < 0$ . (Μονάδες 10)
- γ) Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x))^{2023}}{f(x) - f(x_0)}$ . (Μονάδες 9)

## Κανόνες De L' Hospital

## Θέμα 2ο

**23530.** Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης στο  $\mathbb{R}$  συνάρτησης  $f(x)$  για την οποία γνωρίζουμε τα εξής:

- στο σημείο  $A(-1, f(-1))$  της γραφικής παράστασης της  $f$  έχει σχεδιασθεί η εφαπτομένη ευθεία  $(\varepsilon)$ , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- η ευθεία  $y = x$  είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f(x)$  στο  $+\infty$ .



α) Αν γνωρίζουμε ότι  $f(-1) = e - 1$ , να αποδείξετε ότι το  $f'(-1) = 1 - e$  και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης  $(\varepsilon)$ . (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(x)}{x} \right) = 1$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$ . (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - x^2}{f(x)}$ . (Μονάδες 8)

**24755.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$ , η οποία είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .

- α) Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 0$ . (Μονάδες 10)
- β) Να αποδείξετε ότι  $f'(0) = 0$ . (Μονάδες 10)

γ) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $(0, f(0))$ . (Μονάδες 5)

### Θέμα 4ο

**24759.** Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει  $f(x) \geq x^2 - x + 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

α) **i.** Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . (Μονάδες 4)

**ii.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  δεν έχει ασύμπτωτες. (Μονάδες 6)

**iii.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) \geq \frac{3}{4}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . (Μονάδες 5)

β) Αν επιπλέον  $f(1) = 1$  και  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$  να αποδείξετε ότι:

**i.**  $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ . (Μονάδες 5)

**ii.** η  $f$  δεν είναι κοίλη. (Μονάδες 5)

### Αρχική συνάρτηση

#### Θέμα 4ο

**24769.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$ ,  $x > -1$  και έστω  $F$  αρχική της  $f$  με  $F(1) = \ln 2$ .

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x > -1$  ισχύει  $f'(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$  και να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς

τη μονοτονία. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η  $F$  είναι κυρτή στο διάστημα  $[0, +\infty)$ . (Μονάδες 6)

γ) **i.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $F$  στο  $x_0 = 1$ .

(Μονάδες 6)

**ii.** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x > 0$  ισχύει  $\frac{2F(x)-1}{x} \geq \ln 4 - 1$ . (Μονάδες 5)

### Υπολογιστικά ολοκληρώματα

#### Θέμα 4ο

**23957.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^{\ln^2 x}$ ,  $x > 0$ .

α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με  $f'(x) = 2 \frac{\ln x}{x} f(x)$ . (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η  $f$  έχει ολικό ελάχιστο ίσο με 1. (Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $I = \int_1^e \frac{2 \ln x \cdot f(x) + x e^x}{x(f(x) + e^x)} dx$ . (Μονάδες 10)

**24770.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(e^x - 1) + x - 1$ ,  $x > 0$ .

α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη. (Μονάδες 8)

β) **i.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο  $x_0 = \ln 2$ .

(Μονάδες 5)

**ii.** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x > 0$  ισχύει  $\ln(e^x - 1) \leq 2x - \ln 4$ . (Μονάδες 4)

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2 - e^{-x}}{e^{-x} - 1} dx$ . (Μονάδες 8)

## Ιδιότητες ολοκληρωμάτων

### Θέμα 4ο

**23219.** Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, η οποία είναι κυρτή και ισχύει  $f(1) = f'(1) = 2$ .

α) Να βρεθεί η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $(1, f(1))$  και κατόπιν να αποδείξετε ότι  $f(x) \geq 2x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι :

i.  $\int_0^1 f(x) dx > 1$ . (Μονάδες 6)

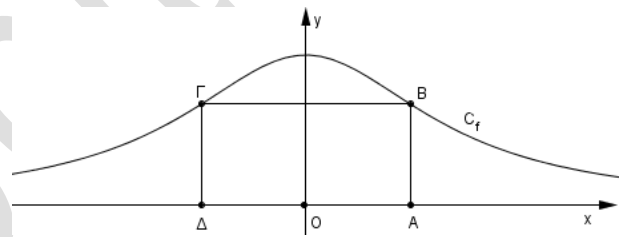
ii.  $\int_0^1 xf'(x) dx < 1$ . (Μονάδες 6)

**24771.** Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνάρτηση για την οποία ισχύει  $f(0) = 1$  και  $(x^2 + 1)f'(x) + \frac{2x}{x^2 + 1} = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . (Μονάδες 5)

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση  $C_f$  της συνάρτησης.

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η  $C_f$  είναι συμμετρική ως προς τον άξονα  $y'y$  και να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών  $B, \Gamma, \Delta$  του ορθογωνίου  $AB\Gamma\Delta$  με τη βοήθεια της τεταμημένης  $\alpha$ ,  $\alpha > 0$  του σημείου  $A(\alpha, 0)$ . (Μονάδες 6)



γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν  $E(\alpha)$  του ορθογωνίου  $AB\Gamma\Delta$  δίνεται από τον τύπο

$$E(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1}, \alpha > 0. \text{ Κατόπιν, να βρείτε για ποια τιμή του } \alpha \text{ το εμβαδόν γίνεται μέγιστο.}$$

(Μονάδες 8)

δ) Αν  $F$  είναι μια αρχική της  $f$  με  $F(1) = \ln 2$ , να αποδείξετε ότι  $\int_0^1 F(x) dx = \ln \sqrt{2}$ . (Μονάδες 6)

## Εμβαδόν επίπεδου χωρίου

### Θέμα 4ο

**23218.** Δίνεται η πολωνομική συνάρτηση  $P(x) = x^3 + 3x^2 - \lambda x + 1$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

α) Να αποδείξετε ότι η  $P(x)$  παρουσιάζει σημείο καμπής για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$  και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου καμπής  $K$ . (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda$  η  $P(x)$  παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και να προσδιορίσετε το είδος τους. (Μονάδες 6)

γ) Έστω ότι  $K(-1, \lambda + 3)$  και ότι η  $P(x)$  παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στις θέσεις  $x_1, x_2$ , με  $x_1 < -1 < x_2$ .

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ( $\varepsilon$ ) της  $C_p$  στο σημείο  $K$  και κατόπιν να αιτιολογήσετε ότι βρίσκεται στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο. (Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν  $E_1$  που περικλείεται μεταξύ των  $(\varepsilon)$ ,  $C_p$  και των ευθειών  $x = x_1, x = -1$  είναι ίσο με το εμβαδόν  $E_2$  που περικλείεται μεταξύ των  $(\varepsilon)$ ,  $C_p$  και των ευθειών  $x = x_2, x = -1$ . (Μονάδες 8)

**24275.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = -x + 1 + \frac{1}{e^x}, x \in \mathbb{R}$ .

α) Να αποδειχθεί ότι η ευθεία  $y = -x + 1$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ . (Μονάδες 07)

β) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς μια ρίζα  $\rho$ , η οποία είναι μεγαλύτερη του 1. (Μονάδες 09)

γ) Να αποδειχθεί ότι το εμβαδό  $E$  του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = 1, x = \rho$  ισούται με  $E(\Omega) = -\frac{(\rho-1)^2}{2} - (\rho-1) + e^{-1}$  τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 09)

**24704.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln x + e^x, x > 0$ .

α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ . (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει ακριβώς σε ένα σημείο  $A$  τον άξονα  $x'x$ , με τετμημένη  $x_0 \in (0, 1)$ . (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν  $E$  του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και την ευθεία με εξίσωση  $x = 1$ , είναι  $E = e + (x_0 - 1)(1 - \ln x_0)$ . (Μονάδες 10)